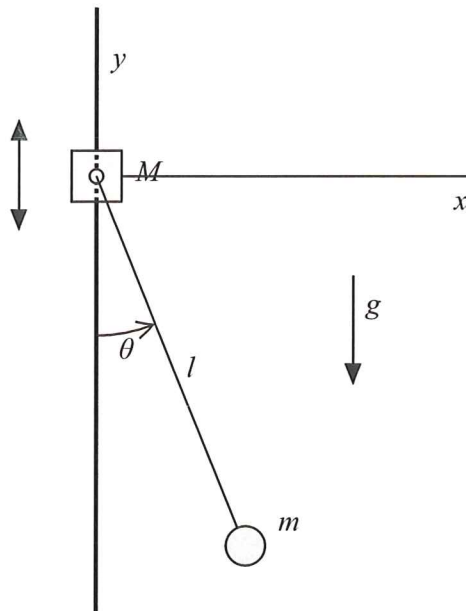


Tentamen
Mechanica & Relativiteit 2
2 juli 2012, 13:00–16:00u

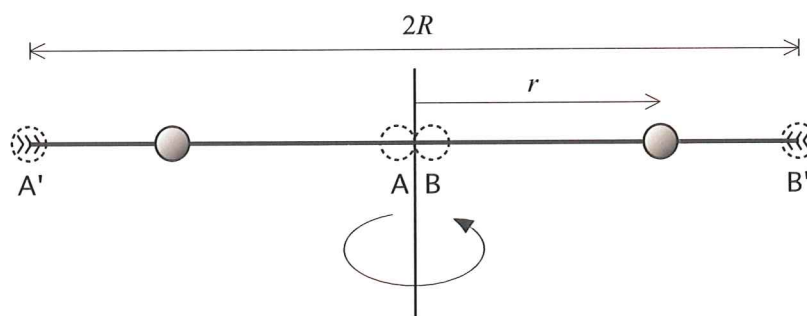
Opgave 1 Twee massa's zijn met een massaloos koord van lengte l met elkaar verbonden. Eén van de twee (met massa M) kan slechts verticaal op en neer bewegen (zonder wrijving), de andere (met massa m) kan onder invloed van de zwaartekracht (met versnelling g) heen-en-weer slingeren. We kiezen ervoor om de verticale positie y en de uitwijking θ ten opzichte van de verticaal als vrijheidsgraden te gebruiken.



- Waarom is het nulpunt van de y -coördinaat niet relevant voor de beschrijving van bovenstaande situatie?
- Stel de Lagrangiaan $\mathcal{L}(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ op.
- Leidt de bewegingsvergelijking in y -richting af. In het resultaat kunnen de uitwijking θ en haar tijdsafgeleiden voorkomen. Bespreek de oplossing van deze bewegingsvergelijking in het geval dat (i) m altijd recht onder M hangt; (2) m met constante hoeksnelheid $\dot{\theta}$ om M heen roteert.
- Onderzoek nu de situatie waarbij de massa M door een uitwendige actie harmonisch op-en -neer wordt bewogen met cirkelfrequentie Ω , d.w.z. $y = y_0 \cos(\Omega t)$. Hiermee blijft slechts één graad van vrijheid over, θ . Toon aan dat de Lagrangiaan nu gereduceerd kan worden tot

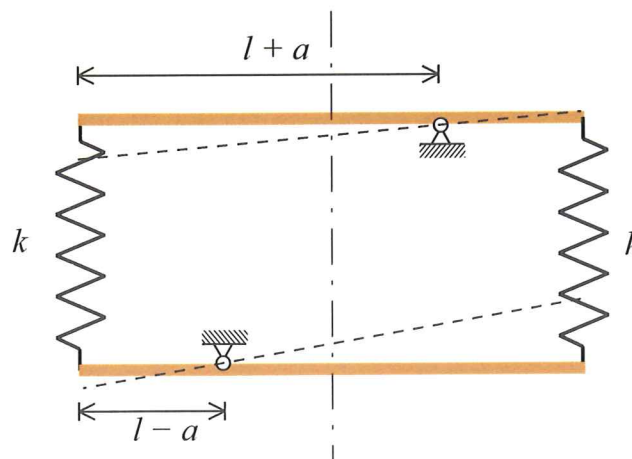
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + ml[g \cos \theta - y_0\Omega\dot{\theta} \sin(\Omega t) \sin \theta]$$

Opgave 2 Twee kogels met straal a en massa m kunnen wrijvingsloos glijden over een horizontale staaf $A'B'$ die vrij kan roteren om een verticale as door het midden. De horizontale staaf heeft lengte $2R$ en massa M . In de beginsituatie, waarbij de kogels tegen de draai-as worden gehouden (posities AB , is de rotatiesnelheid gegeven door ω_0 . Aangezien er geen enkele vorm van wrijving aanwezig is, zal het systeem met dezelfde snelheid blijven ronddraaien, totdat op zeker moment beide kogels tegelijkertijd loskomen. Onder invloed van de centrifugaalkracht zullen de kogels dan naar buiten bewegen en zal de rotatiesnelheid veranderen. Wanneer zij de einden $A'B'$ bereiken worden ze daar door weerhaken vastgeklemt (als ware het een volkomen *inelastische* botsing).



- Bepaal het traagheidsmoment rond de verticale as door het midden van staaf mét kogels wanneer deze zich op een willekeurige afstand r van de draai-as bevinden.
- Bereken de verhouding tussen de rotatiesnelheid $\omega(R)$ op het moment dat de kogels de uiteinden hebben bereikt en de initiële waarde ω_0 . Laat zien dat deze verhouding gelijk is aan $1/7$ indien $M = m$ en de bolstraal a verwaarloosd mag worden in vergelijking met R .
- Hoeveel energie is gedissipeerd wanneer de kogels op de uiteinden zijn vastgepind?

Opgave 3 Twee homogene balken van lengte $2l$ en massa m kunnen wrijvingsloos draaien om scharnieren die geplaatst zijn op een afstand a vanuit hun midden is. De uiteinden van de balk zijn aan elkaar gekoppeld met veren met veerconstante k . In de evenwichtsstand zijn de balken onderling parallel evenals de veren, zoals hieronder geschetst.



- a. Druk het traagheidsmoment I van iedere balk ten opzichte van zijn draaipunt uit in de gegeven grootheden.
- b. Het systeem heeft twee graden van vrijheid. Kies daarvoor de hoekverdraaiingen (tegen de wijzers van de klok) θ_1 and θ_2 van respectievelijk de bovenste en onderste balk. Stel de Lagrangiaan $L(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)$ op in termen van I , k en de afmetingen l en a .
- c. Leidt de bewegingsvergelijkingen af, schrijf deze in de vorm

$$M \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en geef de massa- en stijfheidsmatrices M en C .

- d. Toon aan dat de twee eigenfrequenties van dit systeem gelijk zijn aan

$$\omega_1 = 2l\sqrt{k/I}, \quad \omega_2 = 2a\sqrt{k/I}$$

Bepaal de bijbehorende trillingsvormen. Leg uit wat er gebeurt als $a = 0$.

| Opgave | aantal punten |
|--------|---------------|
| 1 | 1+2+3+2=8 |
| 2 | 2+3+2=7 |
| 3 | 1+2+2+3=8 |

Tentamencijfer = (totaal punten + 2) / 2.5

